1ο μάθημα

11/10/19

"Θεωρία Συνόλων"

**Cantor** (ορισμός συνόλου): Λέγεται σύνολο εννοούμε κάθε συλλογή από $\boxed{\text{ορισμένα}}$ κ. $\boxed{\text{διακεκριμένα}}$ αντικείμενα της αίσθησης ή της σκέψης μας, που θεωρούνται ως μια ολότητα

$a \in \{\underbrace{a, b}_{a \neq b}\}$

A σύνολο

x στοιχεία του A

$x \in A$

**Παράδοξο του Russell**:

P(x): "x σύνολο κ. x δεν είναι στοιχείο του x"

π.χ. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

$\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$

$A = \{x : P(x)\}$

$= \{x \text{ σύνολο} : x \notin x\}$ σύνολο

$x \in A \overset{\text{ορ.}}{\underset{\text{του A}}{\Longleftrightarrow}} (x \text{ σύνολο}) \wedge (x \notin x)$

A σύνολο (σύμφ. με τον Cantor)

(1) $\boxed{A \in A}$

ή

(2) $\boxed{A \notin A}$

Θα ισχύει μια από τις (1) κ. (2)

(1) $\underbrace{A}_{\text{στοιχείο του A}} \in \overbrace{A}^{\text{σύνολο}}$

κ. είπαμε ότι: $\boxed{x \in A \Longleftrightarrow x \text{ σύνολο και } x \notin x}$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι A σύνολο

άρα για να ισχύει $A \in A$, πρέπει και $A \notin A$

ΠΑΡΑΔΟΞΟ!

άρνηση ορισμού

(2) $A \notin A \Leftrightarrow A$ δεν είναι σύνολο ή $A \in A$

στοιχείο $\Leftrightarrow A$ όχι σύνολο ή $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$

Συνεπώς δείξαμε ότι

Έτσι, δημιουργήθηκαν κάποια αξιώματα ε.ω. να μη φτάνουμε σε τέτοια παράδοξα. Από αυτά τα αξιώματα κατασκευάζονται σύνολα.

ΓΕΝΙΚΑ στη θεωρία συνόλων ό,τι $\exists$ είναι σύνολο.

V σύμπαν της αντίστ. θεωρίας (αντικείμενα τα σύνολα που προκύπτουν απ' τα αξιώματα)

$\Uparrow$

αξιώματα κάποιας θεωρίας

Αξ. 1: Τα σύνολα $x, y$ είναι ίσα $\Leftrightarrow$ έχουν τα ίδια στοιχεία

Αξ. 2: $\exists$ σύνολο χωρίς στοιχεία

Αξ. 3: Αν $x, y, z$ 3 σύνολα, τότε $\exists$ σύνολο με στοιχεία ακριβώς $x, y, z$

$\{x, y, z\} \in V$

Άρα από Αξ. 2 $\Rightarrow \exists A$ χωρίς στοιχεία

Ερώτηση: Είναι το $A$ μοναδικό (χωρίς στοιχεία)?

$\hookrightarrow$ Αν $\exists B$ ώστε το $B$ να μην έχει στοιχεία

Θ.δ.ο. $B = A \Leftarrow$ Αξίωμα 1

Το μοναδικό $A$, που δεν έχει στοιχεία το συμβ. με $A = \emptyset$ ($\in V_{\text{αντίστ. θεωρίας}}$ σύμπαν)

Ερώτηση: Το $\{\emptyset\} \in V$ ορίζεται;

$\hookrightarrow \exists\, x = y = z = \emptyset$, χρησιμοποιούμε το Αξ. 3

$\Rightarrow$ Ορίζεται το σύνολο $\{\emptyset\}$

$x = y = \emptyset$, $z = \{\emptyset\} \xrightarrow{\text{Αξ. 3}} \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

A σύνολο : σταθερή εικόνα για το ποια είναι τα στ. του

$x \in A$ ή $x \notin A$

$x \in A$, $x$ μέλος του $A$

στοιχείο του $A$

$x \in y$ $(x \in y)$

$(y \in x)$

Αξίωμα έκτασης: Δύο σύνολα θα είναι ίσα, αν έχουν τα ίδια στοιχεία

$A = B \Leftrightarrow [$για το τυχόν $x$, $x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ για το τυχόν $x$

$x \in A \Rightarrow x \in B$

ΑΣΚΗΣΗ: $A \subseteq A$, A σύνολο

• ΟΡΙΣΜΟΣ: $A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ και $A \neq B$

Παρατήρηση: $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq C$

$\in, \subset$

$A \subseteq A$ ανακλαστική

$\forall x \, (x \in x)$ δεν ισχύει

$\in$: μεταβατική (?)

$\left.\begin{array}{l} x \in y \\ y \in z \end{array}\right\} \Rightarrow x \in z$

$1 \in y = \{1, 2\}$

$y \in z = \{\{1,2\}, 3\} = \{y, 3\}$

$1 \notin z$

Προτάσεις: Δημιουργούνται από τις ατομικές προτάσεις με σύνθεση χρησιμοποιώντας λογικά σύμβολα.

Ατομικές προτάσεις: $x \in A$

$A = B$ ($A$, $B$ μεταβλ. ή σταθερές)

Λογικά σύμβολα - σύνδεσμοι:

$\wedge, \vee, \sim, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \Leftarrow, \exists, \forall, \exists!$

ποσοδείκτες

$\to x$ δεσμευμ. μετ.

$(\exists x)(x \in A)$ "A μη κενό"

$(\exists x)(y \in A)$ : το ίδιο $(y \in A)$

$\to y$ ελεύθερη μεταβλ.

$(\exists y)(y \in A)$

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω πρόταση $P(x)$ όπου $x$ μεταβλητή. Η $x$ είναι ελεύθερη στην $P(x)$ αν η $x$ εμφανίζεται στην $P(x)$, τουλάχιστον 1 φορά χωρίς να δεσμεύεται από ποσοδείκτη.

$x \in A$

$P(x)$

$(\forall x)(x \in A)$

$(x \in A) \wedge [(\forall x)(x \in B)] \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge [(\forall y)(y \in B)]$

**2ο αξίωμα** (**Διαχωριστικό αξίωμα**):
Έστω σύνολο $A$, κ' πρόταση $P(x)$, $x$ ελεύθερο στην $P(x)$. Τότε $\exists$ ένα σύνολο $B$, του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς εκείνα τα $x \in A$ κ' $P(x)$ αληθής.

$A$, $B = \{x \in A : P(x) \text{ αληθής}\} = \{x \in A : P(x)\}$

Αν $\Gamma$ δεύτερο σύνολο που ικανοποιεί το Αξίωμα 2

$x \in \Gamma \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (P(x)) \Longleftrightarrow x \in B \overset{\text{Αξ. 1}}{\Longrightarrow} B = \Gamma$

$\{x \text{ σύνολα} : P(x)\}$

$\{x \text{ σύνολο} : x \notin x\}$

$\{x \in V : x \notin x\}$

<u>Κατασκευή</u> (Russell), δεδομένων των αξιωμάτων (1, 2)
Αποδεικνύουμε ότι το σύμπαν $V$ δεν είναι σύνολο.
Έστω ένα τυχαίο σύνολο $A$.
Θα κατασκευάσουμε ένα νέο σύνολο $B$ ώστε $B \notin A$
<u>Συνέπεια</u>: Το $V$ δεν είναι σύνολο.
Αν ήταν θα υπήρχε $B \notin V$ <u>ΑΤΟΠΟ</u>

$A$, $P(x) : x \notin x$
Από το διαχ. αξίωμα 2 δημιουργείται ένα συγκεκρ. σύνολο.
Αποδ. ότι $B \notin A$ (Με άτοπο).
Έστω ότι $B \in A$, $B = \{x \in A : x \notin x\}$ σύνολο
Τότε αν $B \in B \Rightarrow B \notin B$
αν $B \notin B \Rightarrow \sim(B \notin B) \Rightarrow B \in B$
$B \in B \Leftrightarrow B \notin B$ <u>ΑΤΟΠΟ</u>

<u>Αξίωμα 3</u>: $\exists$ ένα σύνολο $A$

<u>Πρόταση</u>: $\exists$ σύνολο το οποίο δεν περιέχει στοιχεία
<u>Αποδ.</u> (με χρήση αξιωμ. 1, 2, 3)
Από το Αξίωμα 3 $\Rightarrow \exists$ ένα σύνολο $A$
Από το Αξ. 2 $\Rightarrow \{x \in A : \dots\}$ να μην έχει στ.

Ψάχνουμε μια
πρόταση - συνθ. $P(x)$
$\forall x \in A : \sim[P(x)]$

άρα $\Rightarrow \{x \in A : x \neq x\}$
Χρησιμοποιώ το Αξ. 2
$P(x) : x \neq x$, όπου το $x$ είναι
ελεύθερη μεταβλητή.
$B = \{x \in A : x \neq x\}$. Προφανώς το $B$ δεν έχει κανένα
στοιχείο κ' είναι μοναδικό με την ιδιότητα αυτή.
(αυτό είναι άμεσο από το Αξίωμα 1)

Πρόταση: $\emptyset \subseteq A$

Αποδ.

Α.ν.δ.ο. $(\forall x)(\underbrace{x \in \emptyset \Rightarrow x \in A}_{\emptyset \Rightarrow A})$

Αλλιώς με άτοπο: Αν $\emptyset \not\subseteq A$

$\Rightarrow \underline{(\exists x \in \emptyset)} \wedge (\underbrace{x \notin A}_{\text{ΑΤΟΠΟ}}) \Rightarrow x \in \emptyset$

■

4ο αξίωμα (μη διατεταγμένου ζεύγους):

Αν $a, b$ δύο σύνολα τότε $\exists$ ένα σύνολο $A$ που περιέχει τα $a, b$

$a \in A$, $b \in A$

Πρόταση: Αν $a, b$ σύνολα, $\exists$ σύνολο $B$ με στοιχεία ακριβώς τα $a, b$ $(B = \{a, b\})$

Αποδ.:

Από το Αξ. 4, $\exists A$, $a \in A$ κ. $b \in A$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε το $B$.

Θα εφαρμόσουμε το διαχωρ. αξίωμα.

Δημιουργούμε το σύνολο $B = \{x \in A : \underbrace{(x=a) \vee (x=b)}_{F(x)}\}$

Όπως ορίσαμε το $B$, παρατηρούμε ότι:

$x \in B \Leftrightarrow (x=a) \vee (x=b)$

Άρα το $B$ περιέχει ακριβώς τα $a, b$.

Αν $\exists \Gamma$ περιέχει ακριβώς τα $a, b$ τότε:

$x \in \Gamma \Leftrightarrow (x=a) \vee (x=b) \overset{\text{κατασκευή}}{\underset{\text{του } B}{\Leftrightarrow}} x \in B$

$\overset{\text{Αξ. Έκτασης}}{\Rightarrow} B = \Gamma$

→

Άρα $\exists ! B$ με στοιχεία τα $a, b$

Αξίωμα 4 $\Rightarrow$ Για σύνολο $\exists \{a\}$ με επιλογή $a=b$

Αν επιπλέον επιλέξω $a = b = \emptyset \Rightarrow \{\emptyset\}$

$\overset{a \neq \{\emptyset\}}{\Longrightarrow} \{\{\emptyset\}\}$

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$ αξίωμα έκτασης

$\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$

γιατί $\Rightarrow \emptyset \in \{\emptyset\}$

Αν τώρα $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\} \Rightarrow \emptyset = \{\emptyset\}$ ΑΤΟΠΟ ■

**Αξίωμα 5 (Αξίωμα της ένωσης):**

$\forall$ συλλογή (σύνολο) συνόλων $C$ $\exists$ ένα σύνολο $U$, ώστε αν $x \in X$, όπου $X \in C \Rightarrow x \in U$

**Πρόταση:** $\exists ! U'$ ώστε να περιέχει ακριβώς $\boxed{\text{όλα τα } x \in X \text{, όπου } X \in C}$

$U' = \{x \in U : P(x)\}$, $P(x) : (\exists X)((X \in C) \wedge (x \in X))$